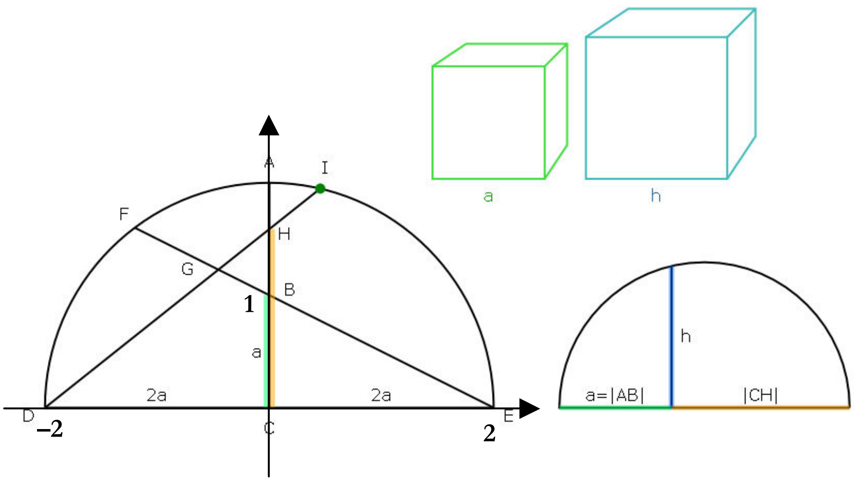
Beweis von Dürers Verfahren zur Würfelverdoppelung



In Albrecht Dürers Anleitung zur Würfelverdoppelung muß die *gerade lini* DI so gezeichnet werden (was nur durch Ausprobieren erreicht werden kann), daß $|GH|=|HI|$ ist. Dann soll im kleineren Thaleskreis mit den Basisabschnitten a und $|CH|$ die Höhe h gleich der Kantenlänge des verdoppelten Würfels sein. Sei die Kantenlänge des zu verdoppelnden Würfels o.B.d.A. mit a=1 angenommen.

Da die Kantenlänge des Würfels mit doppeltem Volumen $\sqrt[3]{2}$ mal die Kantenlänge des einfachen Würfels beträgt, nehmen wir an, daß die Höhe h in Dürers zweitem Thaleskreis diesen Wert richtig angibt, und zeigen, daß aus $h=\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$ dann tatsächlich $|GH|=|HI|$ folgt.

Aus dem Höhensatz $h^2=a|CH|$ ergibt sich für a=1 sofort $|CH|=2^{\frac{2}{3}}$.

Dürers Konstruktion legen wir in ein Koordinatensystem mit C als Ursprung.

Die Gerade DH geht durch D(–2|0) und $(0|\,2^{\frac{2}{3}})$ und hat somit die Gleichung $y=2^{-\frac{1}{3}}x+2^{\frac{2}{3}}$.

Die Gerade EF geht durch B(0|1) und E(2|0), hat also die Gleichung $y = -0{,}5x + 1$.

Für den Schnitt G setzen wir gleich und lösen auf:

$$2^{-\frac{1}{3}}x+2^{\frac{2}{3}}=-0{,}5x+1$$

$$(2^{-\frac{1}{3}}+0{,}5)\,x=1-2^{\frac{2}{3}}$$

$$x_G=\frac{1-2^{\frac{2}{3}}}{0{,}5+2^{-\frac{1}{3}}}\overset{\text{mit 2 erweitern}}{=}\frac{2-2^{\frac{5}{3}}}{1+2^{\frac{2}{3}}}$$

I ergibt sich als Schnitt von DH mit dem Kreis $x^2+y^2=4$, also $x^2+(2^{-\frac{1}{3}}x+2^{\frac{2}{3}})^2=4$

$$x^2+(2^{-\frac{2}{3}}x^2+2^{\frac{4}{3}}x+2^{\frac{4}{3}})=4$$

$$(1+2^{-\frac{2}{3}})x^2+2^{\frac{4}{3}}x+2^{\frac{4}{3}}-4=0$$

Mit der bekannten Lösung x=–2 (bei D schneidet ja die Gerade DI den Kreis) läßt sich der quadratische Term per Polynomdivision faktorisieren.

$$\begin{aligned}
&((1+2^{-\frac{2}{3}})x^2\quad+2^{\frac{4}{3}}x\qquad+2^{\frac{4}{3}}-4):(x+2)=(1+2^{-\frac{2}{3}})x+2^{\frac{4}{3}}-2-2^{\frac{1}{3}}\\
&\underline{(1+2^{-\frac{2}{3}})x^2+(2+2^{\frac{1}{3}})x}\\
&\qquad\qquad(2^{\frac{4}{3}}-2-2^{\frac{1}{3}})x+2^{\frac{4}{3}}-4\\
&\qquad\qquad\underline{(2^{\frac{4}{3}}-2-2^{\frac{1}{3}})x+2^{\frac{7}{3}}-4-2^{\frac{4}{3}}}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad 2^{\frac{4}{3}}+2^{\frac{4}{3}}-2^{\frac{7}{3}}=0 \qquad (2^{\frac{4}{3}}+2^{\frac{4}{3}}-2^{\frac{7}{3}}=2\cdot 2^{\frac{4}{3}}-2^{\frac{7}{3}}=2^{\frac{3}{3}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}-2^{\frac{7}{3}}=2^{\frac{7}{3}}-2^{\frac{7}{3}})
\end{aligned}$$

Die zweite Lösung ist die Nullstelle des Quotienten:

$$(1+2^{-\frac{2}{3}})x+2^{\frac{4}{3}}-2-2^{\frac{1}{3}}=0$$

$$x_I=\frac{2+2^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{4}{3}}}{1+2^{-\frac{2}{3}}}\overset{\text{mit }2^{\frac{2}{3}}\text{ erweitern}}{=}\frac{2^{\frac{5}{3}}+2^1-2^{\frac{6}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}+1}=\frac{2^{\frac{5}{3}}-2}{2^{\frac{2}{3}}+1}$$

Es ist also $x_G=-x_I$, und damit ist in der Tat schon bewiesen, daß $|GH|=|HI|$ ist, da die x-Koordinaten von G und I symmetrisch zu $x_H=0$ sind und G, H und I auf einer Gerade liegen.

Ohne große Umschweife kann man die 2 in obigem Nachweis durch allgemeines n ersetzen (oder auch r, denn Beschränkung auf Ganzzahligkeit ist wegen der allgemeinen Gültigkeit der Potenzgesetze nicht erforderlich) und erhält so den verallgemeinerten Beweis für die Korrektheit der Würfelver-n-fachung, die Dürer für n=3 und n=4 noch explizit analog zum Verdoppelungsverfahren ausführt.

$|CH| = n^{\frac{2}{3}}$

Die Gerade DH geht durch $D(-n|0)$ und $(0|n^{\frac{2}{3}})$, hat also die Gleichung $y = n^{-\frac{1}{3}}x + n^{\frac{2}{3}}$.
Die Gerade EF geht durch $B(0|1)$ und $E(n|0)$, hat also die Gleichung $y = -n^{-1}x + 1$.

$$n^{-\frac{1}{3}}x + n^{\frac{2}{3}} = -n^{-1}x + 1$$

$$(n^{-\frac{1}{3}} + n^{-1})\,x = 1 - n^{\frac{2}{3}}$$

$$x_G = \frac{1-n^{\frac{2}{3}}}{n^{-1}+n^{-\frac{1}{3}}} \overset{\text{mit n erweitern}}{=} \frac{n-n^{\frac{5}{3}}}{1+n^{\frac{2}{3}}}$$

$$x^2 + (n^{-\frac{1}{3}}x + n^{\frac{2}{3}})^2 = n^2$$

Vorsicht, hier ist 2 Faktor aus dem Binom

$$x^2 + (n^{-\frac{2}{3}}x^2 + 2n^{\frac{1}{3}}x + n^{\frac{4}{3}}) = n^2$$

$$(1+n^{-\frac{2}{3}})x^2 + 2n^{\frac{1}{3}}x + n^{\frac{4}{3}} - n^2 = 0$$

$$((1+n^{-\frac{2}{3}})x^2 \quad + 2n^{\frac{1}{3}}x \quad + n^{\frac{4}{3}} - n^2) : (x+n) = (1+n^{-\frac{2}{3}})x + n^{\frac{1}{3}} - n$$

$$\underline{(1+n^{-\frac{2}{3}})x^2 + (n+n^{\frac{1}{3}})x}$$

$$(2n^{\frac{1}{3}} - n - n^{\frac{1}{3}})x + n^{\frac{4}{3}} - n^2$$

$$= \quad (n^{\frac{1}{3}} - n)x + n^{\frac{4}{3}} - n^2$$

$$\underline{(n^{\frac{1}{3}} - n)x + n^{\frac{4}{3}} - n^2}$$

$$0$$

$$(1+n^{-\frac{2}{3}})x + n^{\frac{1}{3}} - n = 0$$

$$x_I = \frac{n-n^{\frac{1}{3}}}{1+n^{-\frac{2}{3}}} \overset{\text{mit } n^{\frac{2}{3}}\ \underline{\text{erweitern}}}{=} \frac{n^{\frac{5}{3}}-n}{n^{\frac{2}{3}}+1} = -x_G$$