Wie man biquadratische Gleichungen löst

Die Vorsilbe „bi-“ bedeutet „doppelt“ oder „zweifach“. Biquadratisch heißt also doppelt quadratisch. Das Doppelte bezieht sich hier auf die höchste Potenz der Unbekannten, in der die Variable auftritt. Bei quadratischen Gleichungen ist das 2 (z. B. x^2), bei biquadratischen Gleichungen 4 (z. B. x^4).
Meist verallgemeinert man den Begriff und spricht von biquadratischen Gleichungen nur dann, wenn sich alle Potenzen der quadratischen Gleichung verdoppelt haben, also die Variable nur in der vierten und in der zweiten Potenz vorkommen. (Die zweite Potenz ist zweifach die „erste“ Potenz, deren Exponent ja nicht geschrieben wird (Exponent=Hochzahl).)

Beispiel: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Die Erklärung des Begriffs biquadratisch gibt bereits die entscheidenden Hinweise auf das Lösungsverfahren. Da ja hier sozusagen anstelle von x^2 ein x^4 auftritt und anstelle von x ein x^2, könnte man hergehen und x^4 einfach durch x^2 ersetzen und x^2 durch x. Um nichts durcheinanderzuwürfeln, nimmt man bei der Ersetzung noch einen anderen Variablenbuchstaben, z. B. y.
Man ersetzt also x^4 durch y^2 und x^2 durch y.
Damit definiert man: $y := x^2$. Der Doppelpunkt vor dem Gleichheitszeichen bezeichnet eine Definition.
Man spricht auch davon, daß x^2 „substituiert“ (ersetzt) wird.
Jetzt kann man die Gleichung so schreiben:

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

Das ist eine gewöhnliche quadratische Gleichung, die man ruckzuck lösen kann, etwa mit der pq-Formel:

$$y_{1,2} = -\frac{-13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-13}{2}\right)^2 - 36} = 6{,}5 \pm \sqrt{42{,}25 - 36} = 6{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = 6{,}5 \pm 2{,}5$$

$$y = 6{,}5 - 2{,}5 = 4 \qquad \text{oder} \qquad y = 6{,}5 + 2{,}5 = 9$$

Weil $y = x^2$ ist, muß man für diese beiden Lösungen für y noch die passenden x bestimmen.
Die Gleichung $y = x^2$ nach x umgeformt, ergibt $x = \sqrt{y}$. Also wären x=2 und x=3 die Lösungen, denn das sind die Wurzeln von 4 und 9. Allerdings muß beachtet werden, daß auch $x = -2$ die Gleichung $y = x^2$ für $y = 4$ erfüllt und entsprechend $x = -3$ für $y = 9$. Also hat man die vier Lösungen:

$$x_{1,2} \pm \sqrt{y_1}$$

$$x_{3,4} \pm \sqrt{y_2}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ ist $L = \{-3\,;\,-2\,;\,2\,;\,3\}$

Ein zweites Beispiel:

$$x^4 + 3x^2 - 40 = 0$$

Substitution: $y := x^2$

$$y^2 + 3y - 40 = 0$$

$$y_{1,2} = -1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 40} = -1{,}5 \pm \sqrt{42{,}25} = -1{,}5 \pm 6{,}5$$

$$y_1 = -8 \qquad y_2 = 5$$

Berechnung von x

für y_1: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-8}$ Ups. Diese Wurzel kann man nicht ziehen.

für y_2: $x_{3,4} = \pm\sqrt{5}$

Lösungsmenge: $L = \left\{ -\sqrt{5}\,;\,\sqrt{5} \right\}$

Eine biquadratische Gleichung hat keine bis vier Lösungen. Wenn sie eine ungerade Zahl von Lösungen hat, ist eine Lösung 0.
Keine Lösung hat sie, wenn nur negative Lösungen für y herauskommen.

Folgende Seite: Aufgaben

Aufgaben:

a) $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$

b) $x^4 + 1{,}75x^2 = 9$

c) $4x^4 - 5x^2 - 9 = 0$

d) $x^4 + 1 = 100{,}01x^2$

e) $\frac{14(2x^2 - 7)}{x} = \frac{225x}{x^2 - 1}$

f) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

g) $x^4 = 3x^2$

h) $x^4 = \frac{1}{4}\left(x^2 - 25\right)$

i) $300 + x^2(x^2 - 102{,}25) = 75$

j) $\frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{2}$

k) $x^3 - \frac{1}{x} = \frac{99}{10}x$

l) $\sqrt{216} \cdot x^2 - \sqrt{\frac{129654}{4}} = \frac{11907}{x^2} - 972$

m) $x^4 - 1235{,}7441 = 4x^2$

n) $35{,}8x \cdot (x^3 - 2{,}045x) + 35{,}25996 = 4{,}071$

Lösungsmengen

a) $\{ \pm 3 ; \pm 5 \}$ b) $\{ -\pm 1{,}5 \}$ c) $\{ \pm 1{,}5 \}$ d) $\{ \pm 0{,}1 ; \pm 10 \}$ e) $\left\{ \pm \frac{\sqrt{14}}{7} ; \pm 3{,}5 \right\}$

f) $\{ \pm 0{,}5 ; \pm 2 \}$ g) $\{ 0 ; \pm \sqrt{3} \}$ h) $\{ \}$ i) $\{ \pm 1{,}5 ; \pm 10 \}$ j) $\left\{ \pm \sqrt{\sqrt{2} + 1} \right\}$

k) $\{ \pm \sqrt{10} \}$ l) $\{ \pm 3{,}5 \}$ m) $\{ \pm 6{,}1 \}$ n) $\left\{ \pm 1{,}2 ; \pm \frac{11\sqrt{2}}{20} \right\}$