

**Ergebnis:** Das einzelne Resultat eines Zufallsexperiments, auch als Elementarereignis bezeichnet, weil es nur aus einem „Element“ besteht.

**Ergebnisraum:** Menge aller möglichen Ergebnisse, elementaren Ausgänge eines Zufallsexperiments.

**Ereignis:** Ein aus einem oder mehreren Ergebnissen, die man als „erfolgreich“ definiert, zusammengesetztes Resultat eines Zufallsexperiments, das hinsichtlich seiner Wahrscheinlichkeit betrachtet wird.

**Gegenereignis  $\bar{E}$**  (der Strich über dem Buchstaben bezeichnet, daß es sich um das Gegenereignis von E handelt): Es umfaßt alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments, die nicht dem Ereignis E entsprechen. Es ist stets  $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

**Laplace-Experiment:** Ein Experiment, bei dem alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich sind. Die Wahrscheinlichkeit von auf einem Laplace-Experiment definierten Ereignissen ist dann das Verhältnis der Anzahl der *günstigen* Ausgänge (also im Sinne des Ereignisses *günstigen* Ergebnisse) zur Anzahl aller *möglichen* Ergebnisse. (Pierre Simon Marquis de Laplace, 1749–1827, war Mathematiker, Physiker (insbes. Wärmelehre) und Astronom.)

**L-Münze, L-Würfel etc.:** Ideale Münzen und Würfel, die genau mit der theoretischen Wahrscheinlichkeit von 0,5 bzw.  $\frac{1}{6}$  aufwarten. L steht für Laplace, siehe Laplace-Experiment

**Relative Häufigkeit:** Der Quotient aus der Anzahl günstiger Fälle zur Anzahl aller Fälle; verwandt mit dem Modell des Laplace-Experiments.

**Absolute Häufigkeit:** Die konkrete Anzahl, wie oft ein bestimmtes Ereignis eingetreten ist.

**Summenregel:** Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse, die zu einem Ereignis gehören, also in dessen Sinne „günstig“ sind, werden zur Wahrscheinlichkeit des Ereignisses aufsummiert.

**Pfadregel:** Die Wahrscheinlichkeiten aller Vorkommnisse, die während eines mehrstufigen Zufallsexperiments passieren, werden miteinander (dem Pfad im Wahrscheinlichkeitsbaum entlang) zur Pfadwahrscheinlichkeit multipliziert.

**„Mindestens einmal“:** Das *Gegenereignis* von „keinmal“. Typisch (und m.W. in jedem Abitur enthalten) eine Aufgabe von Typ: „Wie oft muß man dies und jenes tun, das im Einzelfall mit der Wahrscheinlichkeit von  $p$  klappt, damit es mit einer gewissen Mindestwahrscheinlichkeit  $P$  *mindestens einmal* klappt.“ Man geht dabei so vor:  $P(\text{mind. einmal bei } n \text{ Versuchen}) = 1 - P(\text{keinmal bei } n \text{ Versuchen}) = 1 - (1-p)^n > P$ . (Man rechnet also mit der Wahrscheinlichkeit des nur einen einzigen Fall enthaltenden Gegenereignisses.) Diese Ungleichung kann man dann nach  $n$  auflösen. Bitte daran denken, das größer-als-Zeichen umzudrehen, wenn durch negative Zahlen dividiert wird. (Jeder Logarithmus jeder Wahrscheinlichkeit  $< 1$  ist negativ.)  $n$  wird nicht „kaufmännisch“ gerundet, sondern so, daß die Ungleichung noch stimmt! ( $n=432$  erfüllt z.B. *nicht* die Bedingung  $n > 432,1$ )

**Totale Wahrscheinlichkeit von A:** Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten, die den Fall A enthalten, bzw. die bedingungslose, sozusagen absolute Wahrscheinlichkeit von A.

**Bedingte Wahrscheinlichkeit:** Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses B, abhängig von einem vorher eingetretenen Ereignis A, wird meist so bezeichnet:  $P_A(B)$ . (Gelegentlich auch so:  $P(B|A)$ , die Bedingung steht dabei hinten.). Ein zweistufiger Pfad A-B hat dann die Pfadwahrscheinlichkeit  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$ . Zuerst „passiert“ hier A – ohne Voraussetzung, B dann aber, *nachdem* A eingetreten ist. Ob sich die Wahrscheinlichkeit von B durch A ändert (oder A und B voneinander unabhängig sind), ist der Bezeichnung egal. (Es kann also durchaus sein, daß  $P_A(B) = P(B)$  ist.)

**Umgekehrter oder inverser Wahrscheinlichkeitsbaum:** Ein Baum, der die Reihenfolge der Stufen umdreht, also z.B. nicht zuerst in A bzw.  $\bar{A}$  und dann jeweils in B/ $\bar{B}$  verzweigt, sondern zuerst in B/ $\bar{B}$  und dann in A/ $\bar{A}$ . Die Pfadwahrscheinlichkeiten A-B und B-A sind dabei gleich! D.h., es gilt immer  $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ .

**Satz von Bayes:** Aus der Gleichheit der Pfadwahrscheinlichkeiten  $P(A \cap B) = P(B \cap A)$  folgt, daß  $P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$  ist, womit man bedingte Wahrscheinlichkeiten ineinander umrechnen kann, bzw. zum Beispiel  $P_A(B)$  berechnen kann, wenn die drei anderen Größen  $P(A)$ ,  $P(B)$  und  $P_B(A)$  bekannt sind.

**Stochastische Unabhängigkeit:** Hängt die Wahrscheinlichkeit von B *nicht* vom Eintreten von A ab, dann ist  $P(B) = P_A(B)$ . Man kann dann in der Pfadregel  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$  die bedingte Wahrscheinlichkeit durch die (ja dann gleiche) totale Wahrscheinlichkeit ersetzen und bekommt die Gleichung  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ , die genau dann gilt, wenn A und B voneinander stochastisch unabhängig sind.

**Vierfeldertafel:** Eine Tabelle, die die Wahrscheinlichkeiten bei der Verknüpfung zweier Ereignisse darstellt (die auch als zweistufiges Zufallsexperiment aufgefaßt werden kann). Die Zeilen- und Spaltensummen sind dabei die totalen Wahrscheinlichkeiten; in den Innenzellen stehen die Pfadwahrscheinlichkeiten der jeweils zusammengesetzten Ereignisse.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten können so sehr einfach berechnet werden, indem man die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit in einer Zelle ins Verhältnis mit der Spalten- bzw. Zeilensumme setzt, die die Grundmenge (der vorausgesetzten Bedingung) repräsentiert.  $P_A(B)$  ist  $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ , d.h. die Wahrscheinlichkeit in der Zelle der Kreuzung von A und B geteilt durch die Spalten- oder Zeilensumme vom Merkmal/Ereignis A.

**Stochastisch unabhängig/abhängig:** Steht in einer Zelle der Vierfeldertafel mehr oder weniger genau das rechnerische Produkt aus zugehörige Spalten- und Zeilensumme, sind die beiden Merkmale *stochastisch unabhängig*, unterscheidet es sich (merklich), sind sie „nicht unabhängig“ oder stochastisch „abhängig“. Also:  $P(A) \cdot P(B) \approx P(A \cap B)$  bedeutet, daß A und B stochastisch unabhängig sind (gleichwertig  $P_A(B) \approx P(B)$  oder  $P_B(A) \approx P(A)$ ). Falls deutlich „ $\neq$ “ gilt, sind A und B voneinander *stochastisch abhängig*.

**Zufallsvariable:** Eine (variable) Zahl, deren konkreter Wert von einem Zufallsexperiment abhängt. Man bezeichnet sie meist mit einem großen X. Im Schulunterricht betrachtet man anfangs (im GK ausschließlich) Zufallsvariablen, die nur eine begrenzte Anzahl spezieller Werte annehmen, die man dann mit  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bezeichnet und deren Wahrscheinlichkeiten man dann mit  $P(X=x_i)$  angeben kann, und zwar oft in einer ...

**Tabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung.** Die oberste Zeile dieser zweizeiligen Tabelle enthält die  $x_i$ , also alle konkret möglichen Werte der Zufallsvariable, die untere Zeile die  $P(X=x_i)$ , also die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Zufallsvariable diesen jeweiligen Wert annimmt. Diese hängen natürlich immer vom zugrundeliegenden Experiment ab. Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten muß stets 1 ergeben; und natürlich müssen alle Wahrscheinlichkeiten auch solche sein, also aus dem Intervall  $[0; 1]$  stammen.

**Histogramm:** Ein Balkendiagramm, das jedem speziellen Wert der Zufallsvariablen einen Balken mit einer Höhe zuweist, die der dem Fall zugeordneten Wahrscheinlichkeit entspricht.

**Erwartungswert  $E(X)$ :** Der durchschnittlich zu erwartende Wert, den eine Zufallsvariable X annimmt (z.B. im Durchschnitt bei sehr häufiger Durchführung des Experiments). Er ist ein über die Wahrscheinlichkeiten gewichteter Mittelwert der Zufallsvariablenwerte, also

$$E(X) = P(X=x_1) \cdot x_1 + P(X=x_2) \cdot x_2 + \dots + P(X=x_n) \cdot x_n = \sum_{i=1}^n P(X=x_i) \cdot x_i$$

Der Erwartungswert ist oft ein Wert, der von der Zufallsvariable gar nicht angenommen werden kann. (Z.B. ist der Erwartungswert der Augenzahl beim einmaligen Werfen eines L-Würfels 3,5.)

Der Erwartungswert wird auch mit  $\mu$  bezeichnet, insbesondere bei der Binomialverteilung. Eine weitere (außerhalb der Schule häufige) Bezeichnung ist  $\bar{x}$  (falls X die Zufallsvariable ist).

**„Fair“:** Unter einem *fairen* Spiel, einer *fairen* Wette usw., versteht man im stochastischen Sinne den Fall, daß der Einsatz gleich der im Mittel erwarteten Auszahlung ist, daß also der Erwartungswert für die Größe „Gewinn“ (=Auszahlung minus Einsatz) genau 0 ist.

**Varianz  $V(X)$ :** Ein Streumaß, das den Erwartungswert der mittleren quadratischen Abweichung der Zufallsvariable von ihrem Erwartungswert angibt.  $V(X) = \sum P(X = x_i) (x_i - E(X))^2$ .

**Standardabweichung:  $\sigma$ .** Definiert mit  $\sigma^2 = V(X)$ , d.h.  $\sigma = \sqrt{V(X)}$ . Ein Maß der mittleren Abweichung oder Streuung einer Zufallsvariablen um ihren Erwartungswert. Bei  $\sigma=0$  käme immer genau der Erwartungswert heraus, je größer  $\sigma$ , desto größer die mittlere Abweichung vom Erwartungswert.

**Signifikante, hochsignifikante Abweichung:** Wenn eine Zufallsvariable einen Wert annimmt, der sich um mehr als  $2\sigma$  von ihrem Erwartungswert unterscheidet, spricht man oft von einer *signifikanten* Abweichung – sofern  $\sigma > 3$  ist (Laplace-Bedingung, siehe unten). Ab  $3\sigma$  nennt man es *hochsignifikant*. Diese Abweichungen kommen *zufällig* nur noch mit Wahrscheinlichkeiten von ca. 5 % bzw. 0,3 % vor.

**Hypothese:** Eine angenommene Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, die an der Realität per Zufallsexperiment überprüft wird, oder an der man aufgrund einer als zu groß empfundenen Abweichung von der Erwartung zweifeln kann. Siehe unten. Wichtig: Die Hypothese ist eine Hypothese *über die Wahrscheinlichkeit*, die einem Zufallsexperiment zugrunde liegt, nicht über den davon ja abhängigen Erwartungswert oder so.

**Bernoulli-Experiment:** Ein Experiment, das zwei relevante Ausgänge hat, bzw. bei dem man nur *einen erfolgreichen, konkret definierten Ausgang* betrachtet (der auch zusammengesetzt sein kann („es schneit an einem Montag“)) und alles andere unter dem Gegenereignis subsumiert.

**Bernoulli-Kette:** Eine n-malige Hintereinanderausführung eines Bernoulliexperimentes unter gleichbleibenden Bedingungen, d.h. insbesondere mit konstantem  $p$  für den Erfolg im einzelnen Durchgang, d.h. der Wahrscheinlichkeit für den günstigen Ausgang *in jeder* der  $n$  Ausführungen. Die *Anzahl der dabei erfolgreichen Ausführungen* ist dann eine *binomialverteilte* Zufallsvariable. Sie kann stets (nur) ganzzahlige Werte von 0 bis  $n$  (jeweils einschließlich) annehmen.

**Binomialverteilte Zufallsvariable.** Wenn  $X$  die Anzahl von erfolgreichen Durchgängen bei  $n$ -maliger Durchführung eines stets mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  gelingenden Experiments darstellt ( $\rightarrow$  „Bernoullikette“), dann ist sie als Zufallsvariable *binomialverteilt mit  $n$  und  $p$* , und die Wahrscheinlichkeit, daß diese Experiment bei  $n$  Durchführungen genau  $k$ -mal gelingt, ist:  $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ . Das wird auch kurz mit  $B_{n,p}(k)$  bezeichnet. Dabei ist  $q=1-p$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Experiment *nicht* klappt (*Gegenwahrscheinlichkeit* zu  $p$ ).  $p^k q^{n-k}$  ist die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb der Versuchsreihe mit  $n$  Durchgängen  $k$  erfolgreiche Versuche geschehen, und die anderen  $(n-k)$  eben nicht erfolgreich sind. Die  $k$  erfolgreichen Versuche können dabei an  $\binom{n}{k}$  verschiedenen Stellen innerhalb der  $n$  Durchgänge auftreten. Das ist der sogenannte...

**Binomialkoeffizient**  $\binom{n}{k}$ : Er gibt an, wieviele Möglichkeiten es gibt,  $k$  aus  $n$  Elementen auszuwählen, und zwar ohne Beachtung der Reihenfolge und ohne Wiederholung. Berechnet wird er mit  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ , auf dem TR mit der Taste  $nCr$  ([Shift]+[+]), d.h. z.B.  $100 nCr 5$  für  $\binom{100}{5}$ . Es gilt für *alle*  $n$ :  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$  und  $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ . Übrigens ist stets  $(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$  (binomischer Lehrsatz), wodurch sich auch die Namensverwandtschaft zwischen binomial und binomisch erklärt. Ersetzt man dabei  $a+b$  durch  $p+q$ , erhält man genau die Binomialverteilung, denn  $(p+q)^n = 1^n = 1$ , und rechts steht die Summe aller  $B_{n,p}(X=k)$  für  $k=0$  bis  $k=n$ .

**Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung binomialverteilter Zufallsvariablen:**

Es gilt *nur* für *binomialverteilte*  $X$ :  $\mu = E(X) = np$ ,  $V(X) = npq$  und  $\sigma = \sqrt{npq}$ , wobei wie üblich  $q=1-p$  ist.

**Kumulierte Wahrscheinlichkeiten:** Kumulieren bedeutet anhäufen. Man versteht darunter die Wahrscheinlichkeit, daß eine z.B. binomialverteilte Zufallsvariable einen Wert aus einem bestimmten Bereich annimmt, und die besteht aus der *Summe* aller Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Fälle aus diesem Bereich. Mit  $F_{n,p}(k)$  wird die Wahrscheinlichkeit aller Fälle *von 0 bis  $k$*  bezeichnet:

$$F_{n,p}(k) = \sum_{j=0}^k B_{n,p}(j)$$

**Laplace-Bedingung:** Falls für eine binomialverteilte Zufallsvariable  $\sigma > 3$  ist, ist die *Normalverteilung* eine hinreichend gute Näherung für diese Binomialverteilung. Und so können, falls die Laplace-Bedingung erfüllt ist, Eigenschaften der (Standard-)Normalverteilung auf die Binomialverteilung angewendet werden, etwa daß die Wahrscheinlichkeit, daß  $X$  Werte innerhalb der  $2\sigma$ -Umgebung von  $\mu$  annimmt,

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2} dx \approx 0,95450 \text{ beträgt, und bei } 3\sigma: \int_{-3}^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2} dx \approx 0,99730. \text{ Oder man kann näh-}$$

rungsweise  $B_{n,p}(X \leq k) \approx \int_{-\infty}^{\frac{k-np+0,5}{\sqrt{npq}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2} dx$  annehmen (diese Werte sind oft noch tabelliert) und

damit beispielsweise die Binomialverteilung für sehr große  $n$  approximieren, überhaupt auch ein passendes  $n$  finden oder Bereichsgrenzen finden, ohne ausprobieren zu müssen.

**Stichprobenlänge:** Man bezeichnet eine Auswahl aus einer Gesamtmenge, die man auf ein bestimmtes Merkmal testet ( $\rightarrow$  Bernoullikette!), als Stichprobe. Die Größe (Anzahl der Personen z.B.) dieser Auswahl nennt man Stichprobenlänge  $n$ . Dieser Begriff wird auch auf das  $n$  beliebiger Bernoulliketten verallgemeinert, auch wenn es sich nicht im tatsächlichen Sinne um eine Stichprobe handelt.

**Ablehnungsbereich:** Weicht der Wert  $k$  einer Zufallsvariable  $X$  sehr von seinem Erwartungswert ab, können Zweifel aufkommen, ob der Erwartungswert überhaupt stimmt. Der Erwartungswert ist bei fester Stichprobenlänge  $n$  ja abhängig von  $p$ , daher bezweifelt man aufgrund des auffällig abweichenden Ergebnisses die Richtigkeit von  $p$ . Alle noch mehr als  $k$  abweichenden Werte würden noch mehr Zweifel begründen. Daher markiert  $k$  den Anfang des sogenannten Ablehnungsbereichs. Ist  $k > \mu$ , dann ist der Ablehnungsbereich („rechtsseitig“):  $[k; n]$ . Bei  $k < \mu$  („linksseitig“) ist er  $[0; k]$ .  $p$  kommt somit in den Rang einer hypothetischen Wahrscheinlichkeit. Für alle Ergebnisse  $X \in$  Ablehnungsbereich lehnt man dann die Hypothese, daß das „ $p$ “ richtig sei ab.

**Irrtumswahrscheinlichkeit erster Art** (mit  $\alpha$  abgekürzt): Man kann natürlich auch zufällig Werte aus dem Ablehnungsbereich bekommen, wenn  $p$  stimmt. Je weiter die kritische Zahl  $k$  (also der Anfang des Ablehnungsbereichs) von  $\mu$  entfernt liegt, desto unwahrscheinlicher zwar, aber das ist nie ganz ausgeschlossen. Da man sich aber in diesem Fall für eine Ablehnung von  $p$  entscheidet, wenn  $X \in$  Ablehnungsbereich ist, ist die Wahrscheinlichkeit, mit  $p$  berechnet, daß  $X \in$  Ablehnungsbereich ist, genau die Wahrscheinlichkeit, daß die Ablehnung von  $p$  irrtümlich geschieht.

Der **Fehler erster Art** ist die irrtümliche Ablehnung der (Null)hypothese. Die Irrtumswahrscheinlichkeit erster Art ist  $\alpha$ , also die Wahrscheinlichkeit, diesen Fehler zu begehen, siehe oben.

**Signifikanzniveau:** die (in einem bestimmten Kontext zulässige) Obergrenze für die Irrtumswahrscheinlichkeiten erster Art. Sie kann vorher ( $\rightarrow a priori$ ) gesetzt werden, wenn ein Hypothesentest entworfen wird, d.h. wenn ein Ablehnungsbereich vor einem durchzuführenden Experiment, das eben der Überprüfung der Hypothese dienen soll, so entworfen werden soll, daß er nur noch mit einer Wahrscheinlichkeit  $\alpha \leq$  Signifikanzniveau auftritt. Oder sie kann sich aus einem Versuchsergebnis ergeben, also nach ( $\rightarrow a posteriori$ ) einem Experiment, wenn das Resultat eben Anlaß gibt,  $p$  anzuzweifeln (siehe oben). Dann kann die Hypothese unter allen Signifikanzniveaus  $\geq \alpha$  abgelehnt werden.

**a priori**, „im Vorhinein“: Etwas wird vor einem durchzuführenden Experiment festgelegt, z.B. die kritische Zahl für „nicht mehr zulässige“ Abweichungen vom Erwartungswert (also der  $\rightarrow$  Ablehnungsbereich für  $p_0$ )

**a posteriori**, „im Nachhinein“: Das Experiment selbst schafft die Tatsachen. Ein als kritisch „empfundenen“ Ergebnis bzw. ein „kritischer Wert“ von  $X$  sorgt für die Konstruktion des Ablehnungsbereichs  $[0; k]$  oder  $[k; n]$  (s.o.), dessen Wahrscheinlichkeit (unter Annahme des angezweifelten  $p$ ) dann  $\alpha$  ist, die Irrtumswahrscheinlichkeit erster Art.

**linksseitig, rechtsseitig, beidseitig:** Unter links versteht man „kleiner als“, rechts wäre „größer als“, es liegt also die Orientierung des Zahlenstrahls  $\rightarrow$  zu Grunde. Gemeint ist die Lage des Ablehnungsbereichs. Ist dieser  $[0; k]$  und  $k < \mu$ , ist der Test linksseitig, bei  $[k; n]$  und  $k > \mu$  ist er rechtsseitig. Beidseitig ist er, wenn die Abweichung auf beiden Seiten kritisch ist, dann hat man einen zweigeteilten Ablehnungsbereich  $[0; k_1] \cup [k_2; n]$  mit  $k_1 < \mu < k_2$ . Und  $\alpha = B_{n,p}(X \leq k_1) + B_{n,p}(X \geq k_2)$ .

---

Folgende Seite(n): Zusätzliche Begriffe im bzw. für den Leistungskurs

## Zusätzliche Begriffe im Leistungskurs:

**Normalverteilung:** Die Funktion  $\varphi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$  beschreibt eine zur Maximalstelle  $x=\mu$  achsensymmetrische Glockenkurve mit Wendestellen  $x=\mu\pm\sigma$ . Sie weist asymptotischen Verhalten zur x-Achse auf und insbesondere gilt  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\mu, \sigma}(x) dx = 1 \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \text{ und } \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . ( $\setminus$  bedeutet „ohne“.) Diese Kurve approximiert die Binomialverteilungswahrscheinlichkeiten  $B_{n; p}(X=x)$ , und zwar desto besser, je größer  $\sigma$  ist, „gut genug“, also mit zuverlässig brauchbaren Werten für  $\sigma > 3$ . Nun ist hierbei der Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  mit unendlich vielen Werten, die alle mit der Wahrscheinlichkeit 0 auftreten. (Kein Mensch dürfte z.B. *genau*  $\sqrt{2}$  m groß sein, obwohl das nahe am Durchschnitt liegen dürfte.)  $g(x)$  gibt daher nicht die „Wahrscheinlichkeit“ dieser Zahl an, und man spricht nicht von einer Wahrscheinlichkeitsfunktion, sondern von einer **Dichtefunktion**. Mit dieser können allerdings mit dem Flächenintegral (Gesamtfläche ist ja 1) Bereichswahrscheinlichkeiten angegeben werden, z.B. wäre  $\int_{100}^{120} \varphi_{100; 15}(x) dx \approx 0,41$  der Anteil jener, deren IQ zwischen 100 und 120 liegt, denn der IQ ist stets mit  $\mu=100$  und  $\sigma=15$  definiert.

Das Integral  $\int_{-\infty}^x g(x) dx$  entspricht der kumulierten Wahrscheinlichkeit für alle Werte der Zufallsvariablen  $\leq X$ , man schreibt es:  $\Phi_{\mu, \sigma}(X)$ .

**Standardnormalverteilung** ist die mit  $\mu=0$  und  $\sigma=1$  „standardisierte“ Normalverteilung. Sie ist symmetrisch zu  $x=0$ , hat die Wendepunkte bei  $x=\pm 1$  und ist in  $\sigma$ -Einheiten skaliert. Statt  $\Phi_{0; 1}(X)$  schreibt man oft nur  $\Phi(X)$ . Aus der Symmetrie folgen (1)  $\Phi(0)=0,5$  (denn von  $-\infty$  bis 0 ist es ja genau die Hälfte der Gesamtfläche 1) und (2)  $\Phi(-X)=1-\Phi(X)$  (denn  $\Phi(X)-\Phi(-X)=2(\Phi(X)-\Phi(0))=2(\Phi(X)-0,5)$ ). Die Werte von  $\Phi(X)$  findet man in Tabellen, oder man kann sie mit den neueren, teureren TRn auch berechnen, entweder direkt über das Zufallsverteilungs-Menü oder über das numerische Integral mit der Funktion  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2}$ . Für die Untergrenze  $-\infty$  kann man dann entweder  $-10$  nehmen oder für  $X > 0$  das Integral von 0 bis X berechnen plus 0,5 (denn das ist ja  $\Phi(0)$ ).

Beispiel: Die Wahrscheinlichkeit der  $2\sigma$ -Umgebung ist  $\Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0,97725 - 1 = 0,95450$ . Analog  $3\sigma$ :  $2\Phi(3) - 1 = 2 \cdot 0,99865 - 1 = 0,99730$ .

Es gilt:  $F_{n; p}(k) := B_{n; p}(X \leq k) \approx \Phi(X^*)$  mit  $X^* = \frac{k-np+0,5}{\sqrt{np(1-p)}} (= \frac{k-\mu+0,5}{\sigma})$ , falls  $\sigma > 3$  ( $\rightarrow$ Laplace-Bed.).

Beispiel:  $B_{2020; 0,13}(X \geq 270) = 1 - F_{2020; 0,13}(269) \approx 1 - \Phi(0,45650) = 1 - 0,67598 = 0,32402$ . Es ist  $X^* = \frac{269-2020 \cdot 0,13+0,5}{\sqrt{2020 \cdot 0,13 \cdot 0,87}} = 0,45650$  und  $\sigma = 15,11496 > 3$ . Der *exakte* Wert für  $B_{2020; 0,13}(X \geq 270)$  ist 0,32171, der Unterschied also 0,00229.

**Standardisierte Zufallsvariable ( $X^*$ ):** Verschieben um den Erwartungswert nach links ( $X-\mu$ ) und Skalieren mit der Standardabweichung  $(X-\mu)/\sigma$  bewirken zusammen ein *Standardisieren* der Zufallsvariable X, so daß sie nach dieser Transformation den Erwartungswert 0 hat und ihre Einheit in Standardabweichungen gemessen ist. So kann insbesondere die kumulierte Binomialverteilung  $F_{n; p}(k) (=B_{n; p}(X \leq k))$  mit der Standardnormalverteilung (die ja  $\mu=0$  und  $\sigma=1$  hat) approximiert werden, d.h. es gilt, falls die Laplace-Bedingung  $\sigma > 3$  erfüllt ist:  $F_{n; p}(k) \approx \Phi(X^*)$  mit  $X^* = \frac{k-\mu+0,5}{\sigma}$ . Das +0,5 kommt daher, daß der Bereich von 0 bis k ja (man stelle sich die rechteckigen Balken im Histogramm vor) nicht bei k aufhört, sondern in der Mitte zwischen k und dem Nachbarbalken k+1.

**Quantil:** Ein Quantil ist für eine vorgegebene Wahrscheinlichkeit P jener Wert k einer Zufallsvariablen X, für den  $P(X \leq k) = P$  gilt. Im Spezialfall der Standardnormalverteilung sucht man zu einer gegebenen Bereichswahrscheinlichkeit p den Wert  $X^*$  der standardisierten Zufallsvariable, für den  $\Phi(X^*) = p$  gilt. Beispiel: Es sei ein *rechtsseitiger* Ablehnungsbereich  $[k; n]$  mit  $\alpha < 0,05$  gesucht, d.h.  $B(X \geq k) < 0,05$ . Dann ist  $B(X < k) = F(k-1) > 0,95$ . Wegen  $F(k-1) \approx \Phi(X^*)$  benötigt man dasjenige  $X^*$ , für das  $\Phi(X^*) = 0,95$  ist. Dieses  $X^*$  ( $\approx 1,64485$ ) nennt man das **Quantil** von 0,95. Mit diesem  $X^*$  kann dann über die Transformationsgleichung  $X^* = \frac{k-1-\mu+0,5}{\sigma}$  (siehe bei *standardisierte Zufallsvariable*) die „kritische Zahl“ k bestimmt werden, was letztlich nichts anderes als die Rücktransformation von  $X^*$  nach k ist. Bezüglich B wäre dann tatsächlich jenes k das Quantil von 0,95.