<u>Ebenen</u> sind flache Gebilde im Raum. Man kann sich vorstellen, daß sie aus einer Kombination von zwei nichtparallelen Geraden entstehen, bei der der Stüzvektor der zweiten Geraden alle Punkte der ersten Gerade durchläuft. Aus dieser Vorstellung folgt auch die <u>Parameterform der Ebenengleichung</u>:
E: $\vec{x} = \vec{u} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$, wobei $\vec{u}$ wieder <u>Stützvektor</u> heißt und $\vec{v}$ und $\vec{w}$ als zwei <u>Richtungsvektoren</u> im Ebenenfall auch <u>Spannvektoren</u> genannt werden, da sie die Ebene zwischen sich sozusagen aufspannen (wie einen Regenschirm, der allerdings selten eben ist, und wenn, dann ist er nun eigentlich kein Schirm, aber gehen würde das wohl auch, ich meine, das mit dem Abschirmen von Regen, auch wenn der Schirm eben nicht schirmförmig, sondern eben wäre. Aber ich schweife wohl etwas ab, und ein Schweif ist eben auch nicht gerade eben.)

Eine Ebene ist durch drei Punkte A, B, C genau dann eindeutig festgelegt, wenn diese Punkte nicht kollinear sind, d.h. nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. (Siehe die Anmerkungen zum „Aufspannen“ oben.) Da durch AB und AC dann zwei unterschiedliche Richtungen gegeben sind, ist die Parameterform schnell hingeschrieben: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$.

Beispiel: $A(1|2|-3), B(2|1|0), C(5|2|17) \to \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\0\\20\end{pmatrix}$

Man kann Richtungen kürzen, also wäre auch $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}$ richtig.

Zur Veranschaulichung: Im 3D-Viewer ist unter den Beispielen ein Listing „Parameterform der Ebene“. Man kann Schnitte Ebene/Ebene und Ebene/Gerade sowie Punktproben mit der Parameterform berechnen, was stets das Lösen von 3x3- oder 3x4-Gleichungssystemen bedingt. Auch Abstandsprobleme könnten mit entsprechenden Ansatzgleichungen (Skalarprodukte zu dann aber mindestens zwei Richtungen der Ebene) gelöst werden: aufwendig.

Eine rechentechnisch für fast alle Anwendungen wesentlich günstigere Darstellung der Ebene ergibt sich aus folgender Überlegung: Sei $\vec{n}$ ein Vektor, der zu *allen* Richtungen der Ebene orthogonal ist. Daß ein solcher Vektor existiert, folgt aus der Überlegung, daß die Ebene quasi aus Rotation eines rechten Winkels „um diesen Vektor“ entsteht. (Man probiere dazu das im Anhang mitgeteilte 3D-Viewer-Listing aus.)
Solch ein zur Ebene orthogoler Vektor heißt <u>Normalenvektor</u>.

Sei nun $\vec{n}$ ein Normalenvektor und P ein fester Punkt einer gewissen Ebene, und X stehe für alle anderen Ebenenpunkte, dann ist der Vektor $\overrightarrow{PX}$ stets orthogonal zu $\vec{n}$, d.h. es gilt $\vec{n} * \overrightarrow{PX} = 0$.
$\Rightarrow\ \vec{n} * (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}) = 0 \ \Rightarrow\ \vec{n} * \overrightarrow{OX} - \vec{n} * \overrightarrow{OP} = 0 \ \Rightarrow\ \vec{n} * \overrightarrow{OX} = \vec{n} * \overrightarrow{OP} \quad (1)$

Schreibt man für $\overrightarrow{OX} = \vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ und für $\vec{n} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, so entspricht die linke Seite von (1) dem Term ax + by + cz, und auch die rechte ist wegen des Skalarprodukts einfach eine reele Zahl, d.

$\boxed{ax + by + cz = d}$ ist die <u>Koordinatenform</u> der Ebenengleichung.

x, y und z sind die Variablen für die Koordinaten aller Ebenenpunkte, a, b und c sind reele Zahlen, die gleichzeitig die Komponenten eines Normalenvektors der Ebene sind, d errechnet sich als Skalarprodukt aus diesem Normalenvektor und dem Ortsvektor eines Ebenenpunktes.

Man findet die Koordinatenform einer Ebene durch drei Punkte entweder durch ein Gleichungssystem, indem man in die allgemeine Koordinatenform alle drei Punkte einsetzt, und das nach a, b und c auslöst. d kann frei gewählt werden, sofern es nicht 0 sein muß.

Der Weg der Wahl ist allerdings der scheinbare Umweg über die Parameterform, die ja schnell hingeschrieben ist. Man muß dann einen Normalenvektor bestimmen, z.B. über ein LGS (aber nur mit zwei Gleichungen, d.h. man kann eine Unbekannte frei wählen), und schließlich das d.

Beispiel mit der Ebene aus dem 1. Beispiel oben:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} * \vec{n} = a - b + 3c = 0 \quad (I) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} * \vec{n} = a + 5c = 0 \quad (II) \end{matrix}$$

II $\Rightarrow$ a = –5c   II–I: b + 2c = 0 $\Rightarrow$ b = –2c   Mit c=–1: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Berechnung d: $d = \vec{n} * \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 5 + 4 + 3 = 12$

Also: **E: 5x + 2y – z = 12**

Man setze zur Kontrolle die Punkte A, B und C ein, es stimmt.

Den Normalenvektor kann man auch formelhaft berechnen, nämlich mit dem Kreuzprodukt bzw. Vektorprodukt zweier Spannvektoren der Ebene:

<u>**Kreuzprodukt**</u>: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$. Für die x-Komponente nimmt man also y aus dem ersten mal z aus dem zweiten Vektor minus umgekehrt („kreuzweise“) z aus dem ersten mal y aus dem zweiten.

Analog verfährt man für die beiden anderen Komponenten, wobei man als Nachfolger der z-Komponente wieder die x-Komponente nimmt. Merke: „Immer nächstes mal übernächstes minus umgekehrt.“

Für das Beipiel oben: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 5 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Man erhält so einen möglichen Normalenvektor, den man dann noch skalieren kann, etwa kürzen, ganzzahlig machen oder Vorzeichenwechsel, wie hier.

Beipiel für die Berechnung einer Koordinatenform für eine Ebene durch die Punkte A(–1|1|0), B(0|2|4) und C(1|0|5):

Parameterform: : $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Normalenrichtung: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ $(=: 3\vec{n}) \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ 3x + y – z = d

Berechnung von „d“: $d = \vec{n} * \overrightarrow{OA}$ (irgendeinen Ebenenpunkt in 3x+y–z einsetzen): $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2$

$\rightarrow$ Koordinatenform: 3x + y – z = –2

Anmerkung: Der Ausdruck $\vec{x} * \vec{n} = d$, der (mit leicht anderen Bezeichnungen) oben in der Herleitung der Koordinatenform auftrat, heißt <u>Normalenform</u> der Ebene. Teilt man diese Gleichung durch den Betrag von $\vec{n}$, erhält man $\vec{x} * \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n} = \frac{d}{|\vec{n}|}$. Wählt man als Normalenvektor einen Einheitsvektor $\vec{n}_e$, so nennt man Vektoren mit dem Betrag 1, dann ist $|\vec{n}_e| = 1$, und es ergibt sich diese Form: $\vec{x} * \vec{n}_e = d_e$, die man <u>Hessesche Normal(en)form</u> nennt. Und nicht etwa normale hessische Form oder so.

Die Hessesche Normalenform hat den Vorteil, daß man (an d_e) direkt den Abstand der Ebene zum Ursprung ablesen kann, aber den Nachteil, daß die Komponenten des Normaleneinheitsvektors fast immer schreckliche Wurzelausdrücke enthalten. Wir verwenden sie daher nicht, sondern dividieren lieber erst dann durch den Betrag des Normalenvektors, wenn es sein muß, nämlich bei Abstandsberechnungen. Siehe unten. Übrigens: Ludwig Otto Hesse: *1811 in Königsberg, †1874 in München.

Sind zwei <u>Ebenen identisch</u>, so lassen sich ihre Koordinatenformen ineinander überführen.

Sind zwei <u>Ebenen parallel</u>, so lassen sich die linken Seiten ihrer Koordinatenformen ineinander überführen (sie haben ja gleiche Normalenrichtung); die rechten Seiten („d“) sind nach der Umformung genau dann unterschiedlich, wenn die Ebenen „echt parallel“ sind, also parallel und nicht identisch.

Eine Ebene, die <u>durch den Ursprung</u> geht, hat stets d=0, denn 0a+0b+0c=0 ∀a,b,c.

Schnittberechnungen

Schnitt Ebene/Gerade

Man setzt die Parameterform der Gerade komponentenweise (für x, y und z) in die Koordinatenform der Ebene ein und löst nach dem Geradenparameter auf. Ist das eindeutig lösbar, gibt es einen Schnittpunkt, welcher der dem Parameterwert entsprechende Geradenpunkt ist. Ist die Gleichung unlösbar (wie etwa „1=2"), gibt es keinen Schnitt, d.h. die Gerade ist echt parallel zur Ebene. Ist die Gleichung für alle Parameterwerte lösbar (z.B. „1=1"), liegt die Gerade in der Ebene. In den beiden letzten Fällen kürzt sich der Parameter beim Vereinfachen aus der Gleichung vollständig heraus. (Das ist übrigens genau dann der Fall, wenn das Skalarprodukt aus Geradenrichtungsvektor und Normalenvektor 0 ergibt, d.h. die Geradenrichtung orthogonal zur Ebenennormalenrichtung ist und mithin auch eine Ebenenrichtung ist.)

Beispiele: E: $2x - 3y + z = 5$ g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$E \cap g: \; 2(1+8\lambda) - 3(4-7\lambda) + (5+3\lambda) = 5 \;\Rightarrow\; 40\lambda - 5 = 5 \;\Rightarrow\; \lambda = \tfrac{1}{4} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}25 \\ 5{,}75 \end{pmatrix}$$

$$E \cap h: \; 2(1+\lambda) - 3(-2+\lambda) + \lambda = 5 \;\Rightarrow\; 8 = 5 \;\Rightarrow\; \text{kein Schnitt} \Rightarrow\; h \,||\, E.$$

$$E \cap k: \; 2(5+\lambda) - 3(1+\lambda) + (-2+\lambda) = 5 \;\Rightarrow\; 5 = 5 \;\Rightarrow\; h \subset E$$ („$\subset$" heißt: „Teilmenge", h liegt komplett in E)

Schnitt Ebene/Ebene

Man löst das (unterbestimmte) 2×3-LGS aus den beiden Koordinatenformen. Eine Unbekannte (mindestens eine) ist dabei jeweils frei, d.h. man kann das Resultat über diese Unbekannte parametrisieren und zur Darstellung der Schnittgeraden kommen. Siehe dazu den entsprechenden Abschnitt in der PDF über LGS.

Spurpunkte von Ebenen

sind deren Schnitte mit den drei Korrdinatenachsen. Bei der x-Achse sind überall y=0 und z=0. Wenn man das entsprechend in die Koordinatenform einsetzt, kann man nach x auflösen und erhält dann die x-Koordinate. Bsp. 1: E: $4x - 5y + z = 3$. SP_x: $y=z=0 \Rightarrow 4x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{4}$, $Sp_x(\frac{3}{4}\,|\,0\,|\,0)$. Analog erhält man $Sp_y(0\,|\,-\frac{3}{5}\,|\,0)$, $Sp_z(0\,|\,0\,|\,3)$. — Bsp. 2: Die Ebene $x-4z=1$ hat keinen Spurpunkt auf der y-Achse, denn sie ist parallel zur y-Achse. — Die Geraden durch je zwei Spurpunkte nennt man Spurgeraden, das Dreieck aus drei den Spurpunkten (falls vorhanden) heißt Spurdreieck. Mithilfe des Spurdreiecks läßt sich die Lage einer Ebene im Schrägbild einigermaßen gut erkennen.

Spurgeraden von Ebenen

sind deren Schnitte mit den drei Koordinatenachsen. Man erhält sie als Geraden durch je zwei Spurpunte, d.h. die Spurgerade mit der x-z-Ebene ist z.B. die Gerade durch Sp_x und Sp_z.

Beispiel: E: $2x-5y+z=4$. Spurpunkte: $Sp_x\,(2\,|\,0\,|\,0)$ (y=z=0, nach x auflösen), $Sp_z(0\,|\,0\,|\,4)$ (x=y=0, nach z auflösen).

Gerade durch Sp_x und Sp_z aufschreiben: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ Skalieren der Richtung (nur Kosmetik): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Oder man schneidet die Ebene nach Standardverfahren per unterbestimmten LGS der beiden Koordinatenformen mit Parametrisierung der Lösungsmenge. Siehe die PDF zu LGS. Die Koordinatenformen der Koordinatenebenen sind z=0, x=0 und y=0.

E: $2x-5y+z=4$ mit y=0: $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{+5II} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda = z$ $\quad \begin{matrix} 2x + \lambda = 4 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{matrix} \;\rightarrow\; \begin{matrix} x = 2 - \frac{1}{2}\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{matrix}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder schöner (Skalierung des Richtungsvektors mit –2): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Abstände

1.) Abstand Ebene-Ursprung. Sei g: $\vec{x} = \lambda\vec{n}$ eine Gerade durch den Ursprung und orthogonal zu einer Ebene E: $\vec{n} * \vec{x} = d$. Dann ist der Schnitt L:=g∩E der Lotpunkt vom Ursprung auf E, und $|EO|$ ist gleich dem Abstand $|OL|$ vom Ursprung zum Lotpunkt. Schnittberechnung durch Einsetzen von $\lambda\vec{n}$ in E: $\vec{n} * (\lambda\vec{n}) = d \Rightarrow \lambda = \frac{d}{|\vec{n}|^2}$, $\overrightarrow{OL} = \lambda\vec{n} = \frac{d}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$, $|OE| = |\overrightarrow{OL}| = |\frac{d}{|\vec{n}|^2}\vec{n}| = \frac{|d|\,|\vec{n}|}{|\vec{n}|^2} = \frac{|d|}{|\vec{n}|}$.

Also: $\boxed{\underline{\text{Abstand Ebene-Ursprung}}\quad |OE| = \dfrac{d}{|\vec{n}|}}$,

wobei d die rechte Seite der Koordinatenform von E ist und $\vec{n}$ der zugehörige Normalenvektor, komponentenweise ablesbar aus den Koeffizienten von x, y und z der linken Seite.

2.) Abstand paralleler Ebenen. Seien E_1 und E_2 zwei parallele Ebenen, bereits so umgeformt, daß sie gleichen Normalenvektor $\vec{n}$ haben. Die rechten Seiten seien d_1 und d_2. Sei $\vec{x} = \lambda\vec{n}$ wieder eine (gemeinsame) Lotgerade vom Ursprung auf die Ebenen (auf beide!), dann gilt analog zur obigen Rechnung für die beiden Lotpunkte: $\overrightarrow{OL_1} = \frac{d_1}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$ und $\overrightarrow{OL_2} = \frac{d_2}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$; und deren Abstand voneinander ist der Abstand der beiden Ebenen voneinander: $|E_1E_2| = |\overrightarrow{L_1L_2}| = |\frac{d_2}{|\vec{n}|^2}\vec{n} - \frac{d_1}{|\vec{n}|^2}\vec{n}| = |\frac{d_2-d_1}{|\vec{n}|^2}\vec{n}| = \frac{|d_2-d_1|}{|\vec{n}|}$

Also: $\boxed{\underline{\text{Abstand Ebene-Ebene}}: |E_1E_2| = \dfrac{|d_2 - d_1|}{|\vec{n}|}}$,

wobei die Ebenen gleichen Normalenvektor haben und d_i die rechten Seiten der Koordinatenformen sind.

3.) Abstand windschiefer Geraden. Seien g und h windschiefe Geraden mit unterschiedlichen Richtungen (sonst wären sie parallel) und G bzw. H zwei parallele Ebenen, die jeweils die beiden Richtungsvektoren der Geraden als Spannvektoren haben und durch je einen der Punkte gehen. Dann gilt $|gh| = |GH|$. Die Abstandsbestimmung zweier windschiefer Geraden kann man also auf die sehr simple Abstandsberechnung zweier Ebenen zurückführen. Man benötigt allerdings einen Normalenvektor, der orthogonal zu beiden Geradenrichtungen ist, und die beiden d_i, die sich jeweils als Skalarprodukt der Stützvektoren von g und h mit dem Normalenvektor ergeben, so daß $|g_1g_2| = \frac{|\vec{n}*\vec{u}_2 - \vec{n}*\vec{u}_1|}{|\vec{n}|} = \frac{|\vec{n}*(\vec{u}_2-\vec{u}_1)|}{|\vec{n}|}$. Siehe auch im Anhang.

Also: $\boxed{\underline{\text{Abstand windschiefer Geraden}}: |g_1g_2| = \dfrac{|\vec{n} * (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)|}{|\vec{n}|}}$,

wobei $\vec{n}$ ein Vektor ist, der zu beiden Geradenrichtungen orthogonal ist, und die $\vec{u}_i$ die beiden Stützvektoren der Geraden sind.

Beispiel: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-10\\15\\9\end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ (Spinne versus Fliege)

$\vec{n} := \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ $-10a+15b+9c=0$ (I), $a+c=0$ (II) $\Rightarrow a=-c$, 10II+I: $15b+19c=0 \Rightarrow b = -\frac{19}{15}c$

Mit $c=-15$ ist $\vec{n} := \begin{pmatrix}15\\19\\-15\end{pmatrix}$ $|gh| = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}15\\19\\-15\end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix}15\\19\\-15\end{pmatrix}\right|} = \frac{|-150+152|}{\sqrt{225+361+225}} = \frac{2}{\sqrt{811}} \approx 0{,}0702$.

Da die Einheit bei der Spinnenaufgabe cm war, wird es also verdammt eng für die arme Fliege...

4.) Abstand Punkt-Ebene. Sei $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{n}$ die Lotgerade des Punktes P mit dem Ortsvektor $\vec{p}$ auf eine Ebene E: $\vec{n} * \vec{x} = d$, so ergibt sich durch ähnliche Rechnungen wie oben aus $\vec{n} * (\vec{p} + \lambda\vec{n}) = d$: $\lambda = \frac{d - \vec{n}*\vec{p}}{|\vec{n}|^2}$,

$\overrightarrow{OL} = \vec{p} + \frac{d-\vec{n}*\vec{p}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$, $|PE| = |\overrightarrow{PL}| = |\vec{p} + \frac{d-\vec{n}*\vec{p}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} - \vec{p}| = |\frac{d-\vec{n}*\vec{p}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}| = |\frac{d-\vec{n}*\vec{p}}{|\vec{n}|}| = \frac{|d-\vec{n}*\vec{p}|}{|\vec{n}|}$

Also: : $\boxed{\text{Abstand Punkt-Ebene: } |PE| = \frac{|d - \vec{n} * \vec{p}|}{|\vec{n}|}}$,

wobei $\vec{n}$ Normalenvektor der Ebene E ist und d die rechte Seite der zugehörigen Koordinatenform und $\vec{p}$ der Ortsvektor des Punktes P.

Beispiel: P(3|4|–5), E: 4x + 7y – 4z = 5 $\quad |PE| = \frac{\left| 5 - \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|5-60|}{\sqrt{16+49+16}} = \frac{55}{9}$

Anhang

```
// Listing 1
// Mit den Schiebereglern können die Komponenten
// der drei Ebenenvektoren verändert werden.
// Es wird automatisch ein Normalenvektor n erzeugt.
// „phi" dreht v und w um n.
param phi {0,360,0}
param ux {-5,5,1}
param uy {-5,5,-1}
param uz {-5,5,1}
param vx {-5,5,2}
param vy {-5,5,0}
param vz {-5,5,-1}
param wx {-5,5,0}
param wy {-5,5,1}
param wz {-5,5,1}
Vektor u [ux,uy,uz]
Vektor v [vx,vy,vz]
Vektor w [wx,wy,wz]
Ebene E x=u+lambda*v+mu*w f=crimson s=0.3
Punkt U (ux|uy|uz)
zeichne u in O
Term q sqrt((#vy*#wz-#vz*#wy)*(#vy*#wz-#vz*#wy)+(#vz*#wx-#vx*#wz)*(#vz*#wx-#vx*#wz)+(#vx*#wy-#vy*#wx)*(#vx*#wy-#vy*#wx))
Term nx (#vy*#wz-#vz*#wy)/#q
Term ny (#vz*#wx-#vx*#wz)/#q
Term nz (#vx*#wy-#vy*#wx)/#q
Vektor n [#nx,#ny,#nz]
zeichne n in U
Term sw sin(#phi*PI/180)
Term cw cos(#phi*PI/180)
Matrix R [[#cw*(#ny*#ny+#nz*#nz)+#nx*#nx|-#cw*#nx*#ny+#nx*#ny-#nz*#sw|-#cw*#nx*#nz+#nx*#nz+#ny*#sw],[-#cw*#nx*#ny+#nx*#ny+#nz*#sw|#cw*(#nx*#nx+#nz*#nz)+#ny*#ny|-#cw*#ny*#nz-#nx*#sw+#ny*#nz],[-#cw*#nx*#nz+#nx*#nz-#ny*#sw|-#cw*#ny*#nz+#nx*#sw+#ny*#nz|#cw*(#nx*#nx+#ny*#ny)+#nz*#nz]]
Bild v_ R*v f=blue
Bild w_ R*w f=green
zeichne v_ in U
zeichne w_ in U
```

Zur Parameterform der Ebenengleichung und zum Abstand windschiefer Geraden finden sich Listings instruktiver Beispiele auf der 3D-Viewer-Seite selbst.