

## Lineare Substitution

---

Die Anwendung der Kettenregel für die Ableitung der verketteten Funktionen  $f(g(x))$  ergibt

$$(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x)).$$

Ersetzt man das Symbol  $f$  durch  $F$  (also eine Stammfunktion von  $f$ ) und  $f'$  entsprechend durch  $f$  (eine Stammfunktion von  $f'$ ), bildet also mit der Kettenregel die Ableitung von  $F(g(x))$ , so ergibt sich:

$$(F(g(x)))' = g'(x) \cdot f(g(x)).$$

Integration auf beiden Seiten ergibt

$$\int (F(g(x)))' dx = \int g'(x) \cdot f(g(x)) dx.$$

Die linke Seite vereinfacht sich zu

$$F(g(x)) = \int g'(x) \cdot f(g(x)) dx$$

Falls nun  $g'(x)$  eine Konstante ist (und nur dann!), kann man es als Faktor vor das Integral schreiben:

$$F(g(x)) = g'(x) \cdot \int f(g(x)) dx$$

Unter der Voraussetzung, daß  $g'(x) \neq 0$  ist, folgt nach Division durch  $g'(x)$ :

$$\frac{F(g(x))}{g'(x)} = \int f(g(x)) dx$$

Die Bedingungen, die an  $g'(x)$  gestellt wurden: konstant und ungleich Null, werden offensichtlich von den Ableitungen aller linearen Funktionen  $g(x) = mx + b$  erfüllt, bei denen  $m \neq 0$  ist, die also nicht konstant sind. Sie besitzen die konstante Ableitung  $g'(x) = m$ .

Aus der Kettenregel folgt also eine Integrationsregel für verkettete Funktionen, bei denen die innere Funktion linear ist:

$$\boxed{\int f(mx + b) dx = \frac{F(mx + b)}{m}}$$

Beispiele:

$$\int (6x - 1)^7 dx = \frac{1}{8} \frac{(6x - 1)^8}{6} = \frac{(6x - 1)^8}{48}$$

$$\int \cos(3x - 17) dx = \frac{\sin(3x - 17)}{3} = \frac{1}{3} \sin(3x - 17)$$

$$\int e^{-0,1x} dx = \frac{e^{-0,1x}}{-0,1} = -10 \cdot e^{-0,1x}$$

$$\int \frac{2}{5x + 2} dx = \int 2(5x + 2)^{-1} dx = 2 \int (5x + 2)^{-1} dx = \frac{2 \ln(5x + 2)}{5} = \frac{2}{5} \ln(5x + 2)$$

$$\int \sqrt{7 - x} dx = \int (7 - x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\frac{2}{3} (7 - x)^{\frac{3}{2}}}{-1} = -\frac{2}{3} \sqrt{(7 - x)^3}$$

Hinweis: Aus dieser Herleitung erklärt sich nicht die Bezeichnung „lineare Substitution“. Siehe dazu die folgende Seite.

## Woher stammt die Bezeichnung „lineare Substitution“?

Bei der Berechnung eines bestimmten Integrals in den Grenzen von  $x_1$  bis  $x_2$  mit der soeben hergeleiteten Methode, z. B. der Berechnung eines Flächenintegrals, erhält man:

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} f(mx + b) dx &= \left[ \frac{F(mx + b)}{m} \right]_{x_1}^{x_2} \\ &= \frac{F(mx_2 + b)}{m} - \frac{F(mx_1 + b)}{m} \\ &= \frac{F(mx_2 + b) - F(mx_1 + b)}{m} \\ &= \frac{1}{m} (F(mx_2 + b) - F(mx_1 + b)) \\ &= \frac{1}{m} [F(t)]_{mx_1 + b}^{mx_2 + b} \\ &= \frac{1}{m} \int_{mx_1 + b}^{mx_2 + b} f(t) dt\end{aligned}$$

Aus der Kurzfassung des soeben Dargestellten,

$$\int_{x_1}^{x_2} f(mx + b) dx = \frac{1}{m} \cdot \int_{mx_1 + b}^{mx_2 + b} f(t) dt ,$$

wird ersichtlich, daß u.a. der lineare Ausdruck  $mx+b$  der linken Seite rechts durch das Symbol  $t$  ersetzt wurde. Daher rührt der Ausdruck *lineare Substitution*: Man ersetzt (*substituiert*) quasi die innere lineare Funktion durch eine neue (lineare) Variable, muß aber infolgedessen erstens die Integrationsgrenzen verändern, nämlich in ihnen die nun innen fehlende lineare Veränderung des Funktionsargumentes von  $f$  wiederherstellen, und das Integral zusätzlich durch die Division durch  $m$  sozusagen wieder richtig „zurückskalieren“, da durch die Substitution ja die ursprüngliche Steigung  $m$  (also die „Skalierung“ der Variable) abhanden gekommen ist. Diese wiederherstellende Skalierung funktioniert nur dann, wenn sie an allen Stellen der (inneren) Funktion konstant und ungleich Null war, also nur bei nichtkonstanten linearen Funktionen!