Für ungerade n>2 gibt es stets mindestens eine Zerlegung in genau zwei Stammbrüche: $\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Hier wird ein Verfahren zum Auffinden aller Möglichkeiten aufgezeigt.

Wegen $\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$, ist $\frac{2ab}{n} = a + b$.
Da n ungerade ist und a+b ganzzahlig, muß n ein Teiler von ab sein.
Es gibt also ein k mit $ab = kn$, d.h.: $b = \frac{kn}{a}$.
Damit folgt durch Einsetzen, Zusammenfassen der Brüche, Multiplikation mit n und Auflösen nach a:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{a}{kn} = \frac{kn + a^2}{akn}$$

$$2 = \frac{kn + a^2}{ak}$$

$$a = k \pm \sqrt{k(k-n)}$$

Der Term rechts kann nur dann ganzzahlig sein, wenn k(k–n) ein Quadrat ist: $k(k-n) =: r^2$
Auflösen nach k ergibt: $k = \frac{n \pm \sqrt{n^2 + 4r^2}}{2}$, wobei hier nur die positive Lösung interessiert.
Mit $t := 2r$ erhält man $k = \frac{n + \sqrt{n^2 + t^2}}{2}$
Da wiederum der Radikand ein Quadrat sein muß, setzen wir $n^2 + t^2 =: s^2$, woraus sich ergibt: $n^2 = s^2 - t^2$.

n^2 ist hier dargestellt als Differenz zweier Quadrate.
Wenn nun p und q so gewählt werden, daß $n^2 = p \cdot q$ ist, dann ist $s = \frac{p+q}{2}$ und $t = \frac{p-q}{2}$, denn

$$s^2 - t^2 = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \frac{p^2 + 2pq + q^2 - p^2 + 2pq - q^2}{4} = \frac{4pq}{4} = pq = n^2$$

Aus der Primfaktorzerlegung von n^2 ergeben sich damit alle möglichen Zerlegungen in zwei Stammbrüche.

Bsp.: $n = 63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$, $n^2 = 3969 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$

p	q	s $= \frac{p+q}{2}$	t $= \frac{p-q}{2}$	r $= \frac{t}{2}$	k $= \frac{n + \sqrt{n^2 + t^2}}{2}$	a $= k - r$	b $= k + r$
3969	1	1985	1984	992	1024	32	2016
1323	3	663	660	330	363	33	693
567	7	287	280	140	175	35	315
441	9	225	216	108	144	36	252
189	21	105	84	42	84	42	126
147	27	87	60	30	75	45	105
81	49	65	16	8	64	56	72
und trivial:							
63	63	126	0	0	63	63	63

$$\frac{2}{63} = \frac{1}{32} + \frac{1}{2016} = \frac{1}{33} + \frac{1}{693} = \frac{1}{35} + \frac{1}{315} = \frac{1}{36} + \frac{1}{252} = \frac{1}{42} + \frac{1}{126} = \frac{1}{45} + \frac{1}{105} = \frac{1}{56} + \frac{1}{72}$$

Hinweise:
- s muß nicht berechnet werden
- Es genügt, um die Primfaktorzerlegung zu umgehen, alle Teiler q von n^2 mit $q<n$ zu suchen. p ergibt sich dann mit $p = n^2/q$.

© Arndt Brünner, Mai 2006
http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/aegyptischedarstellung.htm