Vietas Satz für quadratische Gleichungen

François Viète
1540–1603

François Viète (italienisiert *Vieta*) fand heraus, daß die Parameter p und q der quadratischen Gleichung $x^2 + p\cdot x + q = 0$ sehr einfach mit den Lösungen dieser Gleichung (x_1 und x_2) zusammenhängen:

$$\begin{aligned} p &= -(x_1 + x_2) \\ q &= x_1 \cdot x_2 \end{aligned}$$

Wie kam er drauf?
Wahrscheinlich hat er gewußt, daß man quadratische Gleichungen immer als Produkt von sogenannten Linearfaktoren schreiben kann.
Beispiel:
$x^2 + 2x - 15 = 0$
kann man auch so schreiben:
$(x - 3)(x + 5) = 0$

$(x - 3)$ und $(x + 5)$ sind hierbei die Linearfaktoren. („Linear", weil dort x höchstens in der ersten Potenz, also auch nicht als x^2, vorkommt.)

Wann wird nun der Term $(x - 3)(x + 5)$ Null? Natürlich genau dann, wenn mindestens ein Faktor Null ist. Und das ist der Fall, wenn x die Gegenzahl eines der in den Klammern noch vorhandenen Summanden ist, also $x = 3$ oder $x = -5$.

Wenn man das verallgemeinert und den Fall $(x - a)(x - b) = 0$ anschaut, wobei a und b für irgendwelche konkreten Zahlen stehen, dann ist offensichtlich, daß x=a und x=b die Lösungen der Gleichung sind. Denn wenn man für (alle) x ein a einsetzt, wird die erste Klammer 0, und wenn man b einsetzt, die zweite:

$$\begin{aligned} (x - a)(x - b) &= 0 \qquad & (x - a)(x - b) &= 0 \\ (a - a)(a - b) &= 0 & (b - a)(b - b) &= 0 \\ 0 \cdot (a - b) &= 0 & (b - a) \cdot 0 &= 0 \\ 0 &= 0 & 0 &= 0 \end{aligned}$$

a und b sind also die Lösungen der Gleichung, und man könnte stattdessen auch x_1 und x_2 schreiben: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Beim Ausmultiplizieren dieser Gleichung erhält man
$x^2 - x_2\cdot x - x_1\cdot x + x_1\cdot x_2 = 0$
$x^2 - (x_1+x_2)\cdot x + x_1\cdot x_2 = 0$

Vergleicht man mit $x^2 + p\cdot x + q = 0$, so erhält man $p = -(x_1+x_2)$ und $q = x_1\cdot x_2$.

Setzt man dies umgekehrt wieder in die Gleichung ein, erhält man

$x^2 + px + q = 0$
$x^2 - (x_1+x_2)\cdot x + x_1\cdot x_2 = 0$
$x^2 - x_1\cdot x - x_2\cdot x + x_1\cdot x_2 = 0$

Diese Gleichung stimmt genau dann, wenn x entweder gleich x_1 oder gleich x_2 ist.

1. Fall, $x=x_1$:
$x_1^2 - x_1\cdot x_1 - x_2\cdot x_1 + x_1\cdot x_2 = 0$
$x_1^2 - x_1^2 - x_2\cdot x_1 + x_1\cdot x_2 = 0$
$0 = 0$

2. Fall, $x=x_2$:
$x_2^2 - x_1\cdot x_2 - x_2\cdot x_2 + x_1\cdot x_2 = 0$
$x_2^2 - x_1\cdot x_2 - x_2^2 + x_1\cdot x_2 = 0$
$0 = 0$

Schließlich kann man die p-q-Formel mit dem Satz von Vieta überprüfen und umgekehrt.

Zum einen kann man in der p-q-Formel p und q entsprechend ersetzen:

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$x_{1,2}=-\frac{-(x_1+x_2)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-(x_1+x_2)}{2}\right)^2-x_1x_2}$$

$$x_{1,2}=\frac{x_1+x_2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-x_1x_2}$$

$$x_{1,2}=\frac{x_1+x_2}{2}\pm\sqrt{\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}-x_1x_2}$$

$$x_{1,2}=\frac{x_1+x_2}{2}\pm\sqrt{\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}-\frac{4x_1x_2}{4}}$$

$$x_{1,2}=\frac{x_1+x_2}{2}\pm\sqrt{\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-4x_1x_2}{4}}$$

$$x_{1,2}=\frac{x_1+x_2}{2}\pm\sqrt{\frac{x_1^2-2x_1x_2+x_2^2}{4}}$$

$$x_{1,2}=\frac{x_1+x_2}{2}\pm\sqrt{\frac{(x_1-x_2)^2}{4}}$$

$$x_{1,2}=\frac{x_1+x_2}{2}\pm\frac{x_1-x_2}{2}$$

Erster Fall, „–“: $\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1-x_2}{2}=\frac{x_1+x_2-x_1+x_2}{2}=\frac{2x_1}{2}=x_1$

Zweiter Fall, „+“: $\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_1-x_2}{2}=\frac{x_1+x_2+x_1-x_2}{2}=\frac{2x_2}{2}=x_2$

Dann kann man umgekehrt den Satz von Vieta mit der p-q-Formel überprüfen:

erstens für p:

$$p=-(x_1+x_2)$$
$$p=-\left(\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)+\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\right)$$
$$p=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}-\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)$$
$$p=\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}+\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$
$$p=\frac{p}{2}+\frac{p}{2}$$
$$p=p$$

und zweitens für q:

$$q=x_1\cdot x_2$$
$$q=\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)$$
$$q=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2 \qquad \text{(dritte binomische Formel!)}$$
$$q=\frac{p^2}{4}-\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)$$
$$q=\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q$$
$$q=q$$

Auch für Gleichungen höheren Grades fand Vieta einen solchen Zusammenhang. Das kannst du auch!

Zum Beispiel für die kubische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

Multipliziere $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ aus, fasse nach gleichen Potenzen von x zusammen und lies die Parameter ab.

Fällt dir ein Zusammenhang mit dem Satz für quadratische Gleichungen auf?

Versuche, eine allgemeine Regel für Gleichungen n-ten Grades zu formulieren!