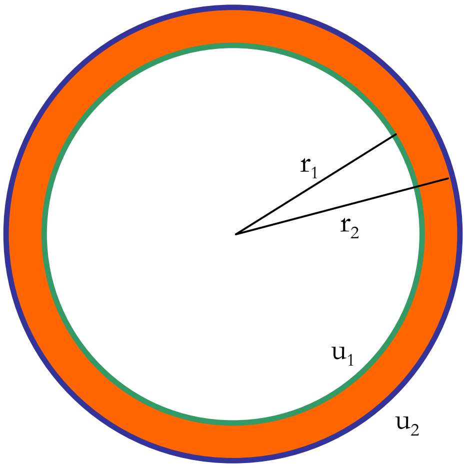
Die goldene Mitte: eine Formel für die Kreisringfläche

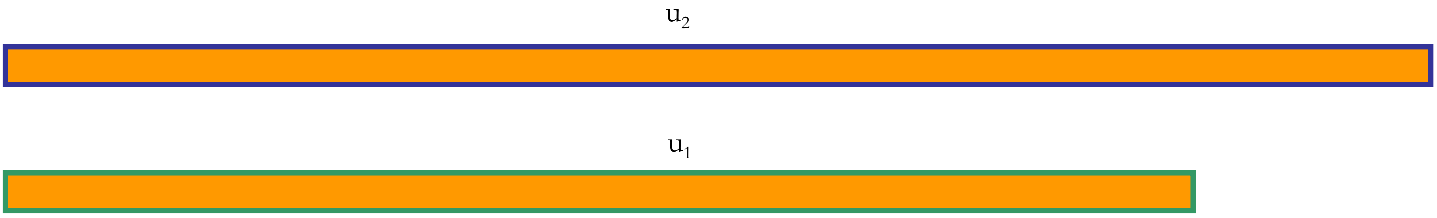
28. 1. 2019

Es soll der Flächeninhalt eines Kreisrings berechnet werden.

Eine Schülerin ging die Aufgabe mit folgender Vorüberlegung an:

Der Ring kann „geradegebogen“ als ein Rechteck mit gleicher Breite betrachtet werden. Nimmt man den äußeren Umfang als Länge, so wird das Rechteck zu großen Flächeninhalt haben, nimmt man den inneren, wird es zu klein sein.





Soweit ist das eine schlaue Idee und sicher richtig. Und die „Wahrheit“ (also die Länge des zum Ring flächengleichen Rechtecks) wird sicher irgendwo zwischen u_1 und u_2 liegen.

Nun war die Vermutung der Schülerin, daß ein Rechteck mit genau dem arithmetischen Mittelwert aus innerem und äußerem Umfang als Länge exakt den gleichen Flächeninhalt wie der Kreisring habe. Und trotz meiner (zugegeben!) anfänglichen Skepsis rechneten wir schnell nach, daß sie recht hat!

Der äußere Rand habe Radius r_2, der innere r_1. Dann ist $A_{Ring} = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$.
(Großer Kreis abzüglich inneren Kreis.)

Die Rechtecke haben jeweils die Breite $r_2–r_1$ (Differenz von Innen- und Außenradius).
Das gemittelte Rechteck hat die Länge $\frac{u_2 + u_1}{2} = \frac{2\pi r_2 + 2\pi r_1}{2} = \pi(r_2 + r_1)$.

Somit hat dieses Rechteck den Flächeninhalt $A = \pi(r_2+r_1)(r_2–r_1) = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ (3. bin. Formel)
und das ist tatsächlich der Flächeninhalt des Rings.

$$\frac{u_2+u_1}{2}$$

$$A_{Kreisring} = \frac{u_2 + u_1}{2} \cdot (r_2 - r_1)$$