Zur Einhüllenden (Enveloppe) einer um die x-Achse rotierenden Gerade

Die Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda v_2\\\lambda v_3\end{pmatrix}$ wird um die x-Achse gedreht.

Das leistet die Multiplikation mit der Rotationsmatrix $M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$:

$$M \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda v_2\\1+\lambda v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\\cos\varphi\cdot\lambda v_2 - \sin\varphi\cdot(1+\lambda v_3)\\\sin\varphi\cdot\lambda v_2 + \cos\varphi\cdot(1+\lambda v_3)\end{pmatrix}.$$

Die orthogonale Projektion auf die x-y-Ebene (z=0) liefert:

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\\cos\varphi\cdot\lambda v_2 - \sin\varphi\cdot(1+\lambda v_3)\end{pmatrix}$, d.h. $x=\lambda$ und $y=\cos(\varphi)\,\lambda v_2 - \sin(\varphi)\,\lambda v_3 - \sin(\varphi)$

Wenn wir $x=\lambda$ in die y-Gleichung einsetzen, erhalten wir die vom Rotationswinkel abhängige Geradengleichung $y_\varphi = (\cos(\varphi)v_2 - \sin(\varphi)v_3)\,x - \sin(\varphi)$. (1)

Nun bestimmen wir deren Enveloppe, die Hüllkurve, und differenzieren dazu nach dem Rotationswinkel φ, wozu wir den Term zunächst gemäß φ zusammenfassen:

$y_\varphi = v_2x\cos(\varphi) - (v_3x + 1)\sin(\varphi)$.

$$\frac{dy}{d\varphi} = -v_2x\sin(\varphi) - (v_3x+1)\cos(\varphi) \qquad (2)$$

Um die Nullstellen der Ableitung zu bestimmen, erst eine Vorüberlegung zur Lösung von Gleichungen der Form $a\sin(\varphi)+b\cos(\varphi) = 0$. Dividiert man durch $\cos(\varphi)$, erhält man

$a\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} + b = 0$, d.h. $a\tan(\varphi) + b = 0$. Und damit ist $\varphi = \tan^{-1}(-\frac{b}{a})$ (3)

Wir müssen hierbei den Fall $\cos(\varphi)=0$ ausschließen: Dabei ist $\sin(\varphi)\neq 0$, d.h. aus $a\sin(\varphi)+0=0$ folgt, daß a=0. Das bedeutet bei $v_2=0$, daß die rotierende Gerade durch die Rotationsachse geht; die Einhüllende ist in diesen Fällen der Rand eines Doppelkegels.

Nun lassen sich die Nullstellen der obigen Ableitung (2) bzgl. φ durch Einsetzen in die eben gewonnene Formel (3) hinschreiben:

$$-v_2x\sin(\varphi) - (v_3x+1)\cos(\varphi) = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = \tan^{-1}(-\tfrac{v_3x+1}{v_2x}). \qquad (4)$$

Dies muß nun in $y_\varphi = (\cos(\varphi)v_2 - \sin(\varphi)v_3)\,x - \sin(\varphi)$ eingesetzt werden.
Dazu überlegen wir zunächst, was $\sin(\tan^{-1}(z))$ bzw. $\cos(\tan^{-1}(z))$ ist.

$$\tan = \tfrac{\sin}{\cos} = \tfrac{\sin}{\sqrt{1-\sin^2}} \;\Rightarrow\; \sin = \tan\sqrt{1-\sin^2} \;\Rightarrow\; \sin^2 = \tan^2(1-\sin^2)$$

$$\Rightarrow\; \sin^2 = \tan^2 - \tan^2\sin^2 \;\Rightarrow\; \sin^2 + \tan^2\sin^2 = \tan^2 \;\Rightarrow\; \sin^2(1+\tan^2) = \tan^2$$

$$\Rightarrow\; \sin = \frac{\tan}{\sqrt{1+\tan^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \sin(\tan^{-1}(z)) = \frac{\tan(\tan^{-1}(z))}{\sqrt{1+\tan(\tan^{-1}(z))^2}} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \qquad (5)$$

Analog geht der Nachweis für cos, der auf $\cos(\tan^{-1}(z)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ führt. (6)

Nun endlich unter Verwendung von (5) und (6) den Ausdruck (4) in (1) einsetzen:

$$y_\varphi = (\cos(\varphi)v_2 - \sin(\varphi)v_3)\,x - \sin(\varphi) \qquad (1)$$

$$y = (\tfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}v_2 - \tfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}v_3)\,x - \tfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$y = \tfrac{v_2x - zv_3x - z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$y^2 = \tfrac{(v_2x-(1+v_3x)z)^2}{1+z^2}$$

Mit der Resubstitution $z = -\frac{v_3x+1}{v_2x}$ ist $1+z^2 = 1+\frac{(v_3x+1)^2}{v_2^2x^2} = \frac{v_2^2x^2+(v_3x+1)^2}{v_2^2x^2}$ und

$$y^2 = \frac{(v_2x-(1+v_3x)(-\frac{v_3x+1}{v_2x}))^2}{\frac{v_2^2x^2+(v_3x+1)^2}{v_2^2x^2}} = \frac{(v_2^2x^2+(1+v_3x)(v_3x+1))^2}{v_2^2x^2+(v_3x+1)^2} = \frac{(v_2^2x^2+(v_3x+1)^2)^2}{v_2^2x^2+(v_3x+1)^2}$$

$$= v_2^2x^2 + (v_3x+1)^2 = v_2^2x^2 + v_3^2x^2 + 2v_3x + 1 = (v_2^2+v_3^2)x^2 + 2v_3x + 1 \qquad (7)$$

Wenn man x durch $(\tilde{x} - \frac{v_3}{v_2^2+v_3^2})$ substituiert, d.h. die Kurve entsprechend in x-Richtung verschiebt, erhält man $y^2 = (v_2^2+v_3^2)\tilde{x}^2 + \frac{v_2^2}{v_2^2+v_3^2}$ oder $-(v_2^2+v_3^2)\tilde{x}^2 + y^2 = \frac{v_2^2}{v_2^2+v_3^2}$, und das ist eine Hyperbel in Mittelpunktslage.

Die Enveloppe unserer rotierenden Gerade ist demnach eine Hyperbel mit der Symmetrieachse $x = \frac{v_3}{v_2^2+v_3^2}$

Durch Skalierung läßt sich dieser Fall verallgemeinern. Dazu muß lediglich statt $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\u_3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ untersucht werden. Es ergibt sich $y^2 = ({v_2}^2+{v_3}^2)\,x^2 + 2u_3v_3x + {u_3}^2$

oder nach verschiebender Substitution $x = \tilde{x} - \frac{u_3v_3}{v_2^2+v_3^2}$ die Hyperbel in Hauptachsenlage

$$-(v_2^2+v_3^2)\tilde{x}^2 + y^2 = \frac{u_3^2v_2^2}{v_2^2+v_3^2}.$$